$\Bbbk$-代数的零张量因子[1]

林 霞[i]，李长远[ii,*]，刘雨喆[i]，赵 伟[iii]

i. 贵州大学数学与统计学院，贵州贵阳，550025，
E-mail: 18984938895@163.com (X Lin)， yzliu3@163.com (Y-Z Liu);
ii. 首都师范大学数学科学学院，北京，100089，
E-mail: 2210502106@cnu.edu.cn (Ch-Y Li);
iii. 阿坝师范学院数学学院，四川汶川，623002，
zw9c248@163.com (W Zhao);
*通讯作者.

摘要. 对定义在域 $\Bbbk$ 上的 $\Bbbk$-代数 A. 本文考虑了两个问题：代数 A 上的张量积 $M\otimes_A N$ 为 0 时，何时能导出 $M=0$ 或 $N=0$；代数上的张量积 $M\otimes_A N$ 中的元素 $m\otimes n$ 为 0 时，何时能导出 $m=0$ 或 $n=0$.

关键词. 箭图表示，张量，零因子，无零因子环.
中图分类号. O153.3; O151.26; O151.23.
2010 Mathematics Subject Classification. 16G10; 16G20; 15A69; 46A32.

The zero tensor-divisors of $\Bbbk$-algebras

Xia Lin [i], Changyuan Li [ii,*], Yu-Zhe Liu[i], Wei Zhao[iii]

i. Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou, 550025, China;
ii. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing, 100089, China;
iii. School of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan, Sichuan, 623002, China;
* Corresponding Author: E-mail: 2210502106@cnu.edu.cn (Ch-Y Li).

Abstract. Let A be a $\Bbbk$-algebra defined over a field $\Bbbk$. This paper consider the two questions: If the tensor $M\otimes_A N$ on A is zero, under what situation is either $M=0$ or $N=0$? If the element, say $m\otimes n$, in $M\otimes_A N$ is zero, under what situation is either $m=0$ or $n=0$?

Keywords: quiver representations; tensors; zero divisors; rings without zero divisor.
2010 Mathematics Subject Classification. 16G10; 16G20; 15A69; 46A32.

引 言

张量是多线性代数中的核心概念，最初指的是环的张量，其最早可以追溯到 Frobenius 对群表示的研究. 张量 (尤其是代数以及模的张量) 在数学，应用数学乃至物理等其它领域的研究中占据极其重要的地位，因此张量总是受到广泛关注. 令 A 是环，右 A-模 M 和左 A-模 N 的张量 $M\otimes_A N$ 本质上是 Abel 群 $M\times N$ 的一种商群，特别地，当 M 和 N 还分别具有左 A'-模和右 A''-模结构时 (这里，A' 和 A'' 也是有限维代数)，那么 $M\otimes_A N$ 自然具有左 A' 右 A''-双模结构，因此自然地看作左 $A''^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A'$-模或者右 $A''\otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$ 模，其中 $A''^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A'$ 和 $A''\otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$ 是环的张量，也称张量环. 对张量环上的模展开系统性的研究是环与代数领域中的重要内容，包括张量代数的箭图表示[7], Clebsch-Gordon 问题[4, 5, 6, 12]，表示型问题[1, 10]，代数的同调/Hochschild 同调性质[2, 3, 8, 9, 11]等.

众所周知，当 A 是交换环时，A 上的左/右模自然地看成 A 上的左 A 右 A-双模 (并常常简称为 A-模). 此时，在同构意义下，A-模的张量具有交换性，即 $M\otimes_A N\cong N\otimes_A M$. 但对于 $M\otimes_A N$ 中的元素 $m\otimes n$ 而言，通常不满足 $m\otimes n=n\otimes m$. 另一方面，将 A 视为定义在自身上的 A-模时，有 $A\otimes_A A\cong A$，该同构由 $x\otimes y\mapsto xy$ 自然给出，即，$A\otimes_A A$ 中的张量乘法由 A 上的乘法给出. 从该角度来看，张量乘法是一种广义的乘法 (从更一般的代数学角度来看，张量积是一种比笛卡尔积更自然的乘法)，且当 A 是无零因子环时，$A\otimes_A A$ 中的元素 $m\otimes n$ 等于 0 当且仅当 $m=0$ 或 $n=0$. 然而，对定义在 A 上的一般的

[1] 国家自然科学基金面上项目 (12171207); 国家自然科学基金地区项目 (12061001); 贵州大学引进人才科研启动基金项目 (贵大人基合字(2022)53 号, (2022)65 号) 资助.

张量积 $M\otimes_A N$ 中:

- $m\otimes n=0$ 未必能导出 $m=0$ 或 $n=0$ (例如本文的例 1 (1)).
- 类似地, $M\otimes_A N=0$ 未必能导出 $M=0$ 或 $N=0$.

于是, 我们可以自然地提出如下问题:

问题 1. 当环 A 满足什么条件时, 对 A 上的任意右 A-模 M 和左 A-模 N, $M\otimes_A N$ 中的元素 $m\otimes n=0$ 蕴含 $m=0$ 或 $n=0$?

问题 2. 当环 A 满足什么条件时, 对 A 上的任意右 A-模 M 和左 A-模 N, $M\otimes_A N=0$ 蕴含 $M=0$ 或 $N=0$?

本文将在 A 是 $\Bbbk$-代数的情形下, 回答上面问题. 并且, 为叙述方便, 本文定义: 环 A 的强零张量因子是非零左 A-模 N (分别地, 右 A-模 M) 使得存在非零右 A-模 M (分别地, 非零左 A-模 N) 满足 $M\otimes_A N=0$; 环 A 的弱零张量因子是非零左 A-模 N (分别地, 右 A-模 M) 中的非零元素 n (分别地, 右 A-模 m) 使得存在非零右 A-模 M (分别地, 非零左 A-模 N) 中的非零元素 m (分别地, 右 A-模 n) 满足 $m\otimes n=0$ (见定义 1, 定义 2). 此外, 本文自此开始, 总是做出如下约定: $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是域 $\Bbbk$ 上的基代数 (basic algebra, 即对 A 的完全本原正交幂等元组 $\{e_i\,|\,1\le i\le n\}$, 始终有 $e_iA\not\cong e_jA$, $\forall i\ne j$); 箭图 $\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}_0,\mathcal{Q}_1,\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 是有限连通箭图, 其中 $\mathfrak{s},\mathfrak{t}:\mathcal{Q}_1\to\mathcal{Q}_0$ 将箭向 a 映射分别为 a 的起点和终点; $\mathcal{I}$ 是 admissible 理想; 所考虑的 A 上的模均是有限生成模, 且对 $\mathcal{Q}$ 上的箭向 a, b, 其复合在 $\mathfrak{t}(a)=\mathfrak{s}(b)$ 的情形下记作 ab.

本文结构如下: 第 1 节, 本文引入零张量因子的概念. 第 2 节, 本文考虑有限维 $\Bbbk$-代数上的强/弱零张量因子的存在性. 第 3 节是本文的主要结果:

主定理. 设 $\Bbbk$-代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 非单, 其箭图连通且只包含至多 1 个 loop.

(1) 如果 A 是有限维代数, 则下面论述等价:
  (a) A 是含强零张量因子代数;
  (b) $\sharp\mathcal{Q}_0\ge 2$;
  (c) $\mathcal{Q}$ 或者包含一个 loop 为真子箭图, 或者不含 loop.

(2) 如果 A 是无弱零张量因子代数, 则 A 是无限维代数.

主定理(1)在 A 是非单的有限维代数, 其箭图连通且只包含 1 个 loop 的情形下, 对问题 2 进行了回答. 主定理(2)则指出, 有限维代数 A 总含有弱零张量因子, 这意味着我们在有限维代数的情形下完全否定了问题 1. 需要指出的是, 非单的无弱零张量因子代数是存在的, 见例 5.

1 零张量因子

1.1 模的张量.

给定环 R 和定义在 R 上的右 R-模 $M_R=M$ 与左 R-模 ${}_RN=N$. M 和 N 的 R-张量是一个由 Abel 群 $M\otimes_R N$ 和 R-双线性函数 $T:M\times N\to M\otimes_R N$ 构成的二元组 $(M\otimes_R N, f)$, 使得对任意给定的 Abel 群 G 和任意给定的 R-双线性函数 $\tilde{T}:M\times N\to G$, 总存在唯一的 $\mathbb{Z}$-模同态 $f:M\otimes_R N\to G$ 使得 $fT=\tilde{T}$.

张量运算满足双线性, 因此, 若 $M=\langle m_i\,|\,i\in I\rangle$, $N=\langle n_j\,|\,j\in J\rangle$, 则 $M\otimes_R N$ 中的任意元素 $m\otimes n$ (不失一般性地, 设 $m=\sum_{i\in I}m_ir_i$, $n=\sum_{j\in J}s_jn_j$, 其中, $r_i,s_j\in R$) 总可以展开为:

$$m\otimes n=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_ir_i\otimes s_jn_j=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_i\otimes r_is_jn_j\overset{r_is_jn_j=n'_{ij}}{=\!=\!=\!=}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}m_i\otimes n'_{ij}.$$

即, $M\otimes_R N$ 中的元素总形如 $\sum_{i=1}^{t}m_i\otimes n_i$, 其中 $m_1,\dots,m_t\in M$, $n_1,\dots,n_t\in N$.

例 1. (1) 对张量 $M\otimes_R N$ 中的元素 $m\otimes n$ 而言, $m\otimes n=0$ 无法推出 $m=0$ 或 $n=0$. 例如取 $R=\left(\begin{smallmatrix}\Bbbk & \Bbbk\\ 0 & \Bbbk\end{smallmatrix}\right)$ 是域 $\Bbbk$ 上的 2×2 的上三角矩阵代数, 易见, 在同构意义下, R 上有三个不可分解右 R-模

$$M_1=\begin{pmatrix}\Bbbk & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Bbbk\end{pmatrix}\cong M_2=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ M_1/M_2$$

以及三个不可分解左 R -模

$$\begin{pmatrix}\Bbbk & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cong N_1=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ N_2=\begin{pmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & \Bbbk\end{pmatrix},\ N_2/N_1.$$

我们考虑 $M_1/M_2\ \otimes_R\ N_2/N_1$. 注意 M_1/M_2 和 N_2/N_1 中的元素分别是形如 $m=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+M_2$ 和 $n=\left(\begin{smallmatrix}0 & u\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)+N_1$ 和的陪集, 于是 $m\ \otimes\ n=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & u\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)+M_2+N_1+M_2\ N_1$. 注意, 作为集合, $M_2=N_1=\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 是 $M_1/M_2\ \otimes_R\ N_2/N_1$ (作为 $\Bbbk$ -向量空间) 中的零向量 $0_{M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1}$, 且 $M_2N_1=0$. 因此, 上式等于 $\left(\begin{smallmatrix}0 & xu+yv\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0 & \Bbbk\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)=0_{M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1}$. 然而, 在 M_1/M_2 和 N_2/N_1 中, m 和 n 都不是零元素.

(2) 注意(1)中的 m 和 n 的任意性, 可知 $M_1/M_2\ \otimes_R\ N_2/N_1=0$.

1.2 零张量因子.

本节我们引入零张量因子的概念.

定义 1. 设 R 是环. 如果存在有限生成右 R -模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R -模 $N={}_RN\neq 0$, 使得 $M\otimes_R N=0$, 则称 M 和 N 是环 R 的*强零张量因子*. 如果环 R 没有强零张量因子 (即对任意的有限生成右 R -模 M 和左 R -模 N , $M\otimes_R N=0$ 蕴含 $M=0$ 或者 $N=0$), 则称 R 是*无强零张量因子环*; 反之称为*含强零张量因子环*.

注记. [13, Chap 2. Proposition 2.45]给出了张量的具体构造方式.

例 2. (1) 域是无零张量因子环. 考虑域 $\mathbb{F}$ 上的任意两个有限生成 $\mathbb{F}$ -模 V 和 W , 有 $\mathbb{F}$ -线性同构 $V\cong\mathbb{F}^v$ 以及 $W\cong\mathbb{F}^w$, 其中 $v,w\in\mathbb{N}_+$. 于是 $V\otimes_{\mathbb{F}}W\ \cong\ \mathbb{F}^{vw}$. 显然, $V\otimes_{\mathbb{F}}W=0$ 当且仅当 $vw=0$, 所以 $V=0$ 或 $W=0$. 进一步地,

(2) 类似于(1), 可以证明无零因子环一定是无零张量因子环.

定义 2. 设 R 是环. 如果存在有限生成右 R -模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R -模 $N={}_RN\neq 0$, 使得存在 M,N 中的非零元素 m,n , 有 $m\otimes n\in M\otimes_R N$ 等于 0, 则称 M 和 N 是环 R 的*弱零张量因子*. 如果环 R 没有弱零张量因子 (即对任意的有限生成右 R -模 M 和左 R -模 N , 如果 $m\otimes n\in M\otimes_R N$ 等于 0, 则 $m=0$ 或者 $n=0$), 则称 R 是*无弱零张量因子环*; 反之称为*含弱零张量因子环*.

例 3. (1) 取 R 是例 **1** (1)中给定的上三角矩阵代数. 在例 **1** (1)中我们在非零右 R -模 M_1/M_2 和非零左 R -模 N_2/N_1 中构造了两个非零元素, 它们的张量为零, 由此可知 R 是含弱零张量因子环. 我们在例 **1** (2)中进一步指出了构造具备任意性, 从而得到 $M_1/M_2\otimes_R N_2/N_1=0$. 由此可见 R 也是含强零张量因子环.

(2) 无弱零张量因子环是无零因子环. 事实上, 反设无弱零张量因子环 R 含有零因子 $r_1\neq 0$ 和 $r_2\neq 0$, 则 R 作为自身上的右- R 模和左 R -模时, 有 $0=r_1\otimes r_2\in R\otimes_R R$. 然而, 同构 $\sigma: R\otimes_R R\xrightarrow{\cong}R$, $\sigma(r\otimes r')=rr'$ 指出 $0=\sigma(r_1\otimes r_2)=r_1r_2$. 这就构造了非零右- R 模 R_R 和非零左 R -模 ${}_RR$, 使得 $R\otimes_R R$ 中有弱零张量因子, 进而与假设矛盾.

命题 1. *含强零张量因子环一定是含弱零张量因子环.*

证. 设 R 是含是强零因子环, 则存在有限生成右 R -模 $M=M_R\neq 0$ 和有限生成左 R -模 $N={}_RN\neq 0$, 使得 $M\otimes_R N=0$. 由 $M\neq 0$ 和 $N\neq 0$ 可知存在 $0\neq m\in M$ 和 $0\neq n\in N$, 使得 $m\otimes n\in M\otimes_R N=0$, 即 $m\otimes n=0$. 这说明 R 是含弱零张量因子环. □

注记. 事实上, 根据例 4 和例 2 (2), 可知无弱零张量因子环是无强零张量因子环. 该结论是命题 1 的逆否命题.

命题 2. *设 $\Bbbk$ 是域, $R=\Bbbk[x]$ 是 $\Bbbk$ 上的一元多项式环.*

(1) R 是含弱零张量因子环.

(2) 进一步地, 如果 $\Bbbk$ 是代数闭域, 则 R 是无强零张量因子环.

证. 本证明中令 $\Bbbk$ 是域, 并令 $R=\Bbbk[x]$ 是 $\Bbbk$ 上的一元多项式环. 则任意有限生成的 R -模 V 是有限

维 $\Bbbk$ -向量空间, 其可以通过箭图 $\overset{x}{\circlearrowright} 1$ 表为二元组 $(V \cong_{\Bbbk} \Bbbk^m, \boldsymbol{\Phi}_x \in \mathrm{Mat}_m \Bbbk^m)$, 其中, 记号 “$\cong_{\Bbbk}$” 表示作为 $\Bbbk$ -向量空间的同构, 右 R -作用 $\Bbbk^m \times R \to \Bbbk^m$ 由 $\boldsymbol{v} \cdot x := \boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{v})$ 给出.

(1) 考虑二元组 $(\Bbbk^m, J_m(\lambda))$ 和 $(\Bbbk^n, J_n(\mu))$, 其中, $\boldsymbol{J}_t(\lambda)$ 表示 $t \times t$ 的特征值 λ 的 Jordan 块 (假定是上 Jordan 块), 且 $m < n$. 则 $\boldsymbol{J}_m(\lambda)$ 有 (极小的) 零化多项式 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^m$. 由 $m < n$ 可知 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x)$ 不是 $\boldsymbol{J}_n(\mu)$ 的零化多项式. 因此, 对 $\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x) \in R$ 以及任意的 $0 \neq w \in \Bbbk^n$, 有 $\boldsymbol{0} \neq \mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x) \cdot \boldsymbol{w} = \mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_n(\mu)) \cdot (\boldsymbol{w}) \in \Bbbk^n$. 任取 $0 \neq v \in \Bbbk^m$, 就得:

$$\boldsymbol{v} \otimes (\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)} \cdot \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}) \otimes \boldsymbol{w} = (\mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_m(\lambda))\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = 0 \otimes \boldsymbol{w} = 0.$$

这样我们就构造了 R 的弱零张量因子 $0 \neq v \in \Bbbk^m$ 和 $0 \neq \mathfrak{m}_{J_m(\lambda)}(x) \cdot \boldsymbol{w} \in \Bbbk^n$.

(2) 当 $\Bbbk$ 是代数闭域时, 注意任意 $m \times m$ 的矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk^m)$ 可以相似于 Jordan 标准型, 因此有限生成的不可分解 R -模对应的箭图表示总是形如 $(\Bbbk^m, J_m(\lambda))$. 任取两个非零箭图表示 $(\Bbbk^m, J_m(\lambda))$ 和 $(\Bbbk^n, J_n(\mu))$, 它们给定了两个不可分解 R -模 $\Bbbk^m$ 和 $\Bbbk^n$. 下面证明 $\Bbbk^m \otimes_R \Bbbk^n \neq 0$.

设 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ 是 $\Bbbk^m$ 的标准正交基, $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ 是 $\Bbbk^n$ 的标准正交基. 则有右 R -模同构

$$\sigma : \Bbbk^m \xrightarrow{\cong_R} \sum_{i \le m-1} \Bbbk x^i = \Bbbk \varepsilon_1 + \Bbbk x + \cdots + \Bbbk x^{m-1},$$

$$(k_1, \cdots, k_m) \mapsto (\lambda k_1 + k_2)\varepsilon_1 + \cdots + (\lambda k_{m-1} + k_m)x^{m-2} + \lambda k_m x^{m-1}$$

以及左 R -模同构

$$\tau : \Bbbk^n \xrightarrow{\cong_R} \sum_{j \le n-1} \Bbbk x^j = \Bbbk \varepsilon_1 + \Bbbk x + \cdots + \Bbbk x^{n-1},$$

$$(k_1, \cdots, k_n) \mapsto (\mu k_1 + k_2)\varepsilon_1 + \cdots + (\mu k_{n-1} + k_n)x^{n-2} + \mu k_n x^{n-1}.$$

于是,

$$\Bbbk^m \otimes_R \Bbbk^n \cong \Big(\sum_{i \le m-1} \Bbbk x^i\Big) \otimes_R \Big(\sum_{j \le n-1} \Bbbk x^j\Big) = \sum_{\substack{i \le m-1 \\ j \le n-1}} \Bbbk x^i \otimes x^j = \sum_{\substack{i \le m-1 \\ j \le n-1}} \Bbbk x^{i+j} \neq 0.$$

因此, 对任意非零的有限生成 R -模 V 和 W, 它们有形如 $\Bbbk^m$ 和 $\Bbbk^n$ 的非零直和项 (其作为 R -模, R -作用由 Jordan 块诱导), 满足 $\Bbbk^m \otimes_R \Bbbk^n \neq 0$, 从而 $V \otimes_R W$ 非零. □

2 代数的零张量因子性

设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是有限维的基本 $\Bbbk$ -代数 ($\mathcal{Q}$ 是连通箭图, $\mathcal{I}$ 是 admissible 理想), M_A 和 ${}_AN$ 分别是有限生成的右 A -模和左 A -模. 则根据唯一分解定理, 可设二者的完全直和分解分别为 $M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M^{(i)}$ 和 $N \cong \bigoplus_{j=1}^{n} N^{(j)}$. 则:

$$M \underset{A}{\otimes} N \cong \Big(\bigoplus_{i=1}^{m} M^{(i)}\Big) \underset{A}{\otimes} \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} N^{(j)}\Big) \cong \bigoplus_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \Big(M^{(i)} \underset{A}{\otimes} N^{(j)}\Big).$$

显见 $M \underset{A}{\otimes} N = 0$ 当且仅当 $M^{(i)} \underset{A}{\otimes} N^{(j)} = 0$. 因此, 对张量 $M \underset{A}{\otimes} N$ 的研究, 转变为对 A 上的右不可分解模和左不可分解模的张量的研究. 本节对张量的讨论始假设为是对不可分解模的张量展开的.

2.1 有限维代数的含/无强零张量因子性.

引理 1. 设有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 $\mathbb{A}_n$ 型子箭图 $\mathcal{Q}' = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n$, 使得对任意 $\mathcal{I}$ 的生成元 $\sum_{i \in I} k_i \wp_i$ (其中 I 是指标集, 且 $\mathfrak{s}(\wp_i) = \mathfrak{s}(\wp_j)$ 和 $\mathfrak{t}(\wp_i) = \mathfrak{t}(\wp_j)$ 对 $i \neq j$ 始终成立), $\wp = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的任意子路径始终不是 $\sum_{i \in I} k_i \wp_i$ 的求和分量, 即 $\wp \neq \wp_i$ ($\forall i \in I$). 则存在 $\Bbbk$- 范畴的嵌入

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F} : \Bbbk\mathcal{Q}'\text{-mod} \to A\text{-mod} \text{ 以及 } \boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}} : \text{mod-}\Bbbk\mathcal{Q}' \to \text{mod-}A,$$

该嵌入自然地将左/右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$ -模视作左/右 A- 模.

证. 由假设可知对任意 $1 \le \imath < \jmath \le n$, $\mathcal{Q}'|_{[\imath,\jmath]} = \imath \xrightarrow{\alpha_\imath} \cdots \xrightarrow{\alpha_{\jmath-1}} \jmath$ 上的路径 $\wp_{[\imath,\ ]} = \alpha_\imath \cdots \alpha_{\ -1}$ 不是 $\mathcal{I}$ 的求和分量, 因此对任意非零右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$ -模 M, 定义 $\widehat{M}$ 是满足

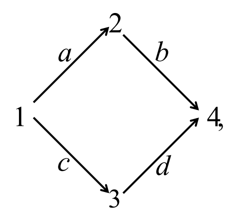
$$\dim_{\Bbbk}\widehat{M}\varepsilon_t=\begin{cases}\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t, & \text{如果} t\in\mathbb{N}_{[\imath,\jmath]};\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

以及

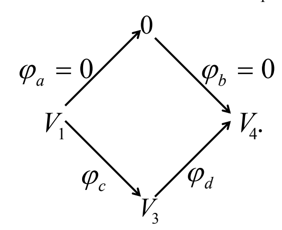
$$\varphi_\alpha:\widehat{M}\varepsilon_s\to\widehat{M}\varepsilon_t,\ \ m\varepsilon_s\mapsto\varphi_\alpha(m\varepsilon_t)=\begin{cases}\varphi_{\alpha_t}(m\varepsilon_t), & \text{如果} \alpha=\alpha_t\ (\imath\le t\le\jmath);\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

的 $(\sharp\mathcal{Q}_0+\sharp\mathcal{Q}_1)$-元组 $(\widehat{M}\varepsilon_t,\alpha)_{t\in\mathcal{Q}_0,\alpha\in\mathcal{Q}_1}$，作为 $\Bbbk$-向量空间的直和 $\bigoplus_{t\in\mathcal{Q}_0}\widehat{M}\varepsilon_t=\bigoplus_{\imath\le t\le\jmath}\widehat{M}\varepsilon_t$（仍记作 $\widehat{M}$）按上述条件自然诱导了一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $\widehat{M}\times\Bbbk\mathcal{Q}\to\widehat{M}$，于是 $\widehat{M}$ 是一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-模. 对任意 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i\in\mathcal{I}$，记 $\wp_i=\alpha_i^{(\ell_i)}\alpha_i^{(\ell_i-1)}\cdots\alpha_i^{(1)}$，$\Bbbk$-线性映射 $\varphi_{\sum_{i\in I}k_i\wp_i}:=\sum_{i\in I}k_i\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}$ 为 0. 否则，存在某个指标集 I 以及该指标集的某个元素 i，使得 $\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}$：$M\varepsilon_{\mathfrak{s}(\alpha_i^{(1)})}\to M\varepsilon_{\mathfrak{t}(\alpha_i^{(\ell_i)})}$ 非 0，这意味着 $\wp_i$ 只能是 $\wp_{[\imath,\jmath]}$ 的某条路径. 这与已知条件矛盾. 因此右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $\widehat{M}\times\Bbbk\mathcal{Q}\to\widehat{M}$ 同时也是右 A-作用 $\widehat{M}\times A\to\widehat{M}$. 这就诱导了一个函子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$：$\mathsf{mod}\text{-}\Bbbk\mathcal{Q}'\to\mathsf{mod}\text{-}A$，满足 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(M)=\widehat{M}$. 该函子自然地将 $\mathsf{mod}\text{-}\Bbbk\mathcal{Q}'$ 视作了 $\mathsf{mod}\text{-}A$ 的一个满子范畴，因而是 $\Bbbk$-范畴之间的嵌入. 对于左模情形的证明与右模情形的证明对偶. □

例 4. 设 $A^{(i)}=\Bbbk\mathcal{Q}^{(i)}/\mathcal{I}^{(i)}$，其中 $i=1,2$，$\mathcal{Q}^{(1)}=\mathcal{Q}^{(2)}=$



$\mathcal{I}^{(1)}=\langle ab\rangle$，$\mathcal{I}^{(2)}=\langle ab-cd\rangle$. 对于 $A^{(1)}$，其箭图有一个 $\mathbb{A}_3$ 型子箭图 $\mathcal{Q}'=1\xrightarrow{c}3\xrightarrow{d}4$. 对于任意右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-模 M，设 M 对应的箭图表示为 $V_1\xrightarrow{\varphi_c}V_3\xrightarrow{\varphi_d}V_4$，其中 V_t 是 $\Bbbk$-向量空间，维数 $\dim V_t=\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t$（$t=1,3,4$）. 则 M 自然地被看作右 $A^{(1)}$-模 $\widehat{M}=V_1\oplus 0\oplus V_2\oplus V_4$（其对应的表示如下所示）.



但是 M 不能被看作右 $A^{(2)}$-模，这是因为由 $A^{(2)}$ 的定义，可知 $ab-cd\in\mathcal{I}^{(2)}$，这蕴含了 $\varphi_b\varphi_a-\varphi_d\varphi_c=0$. 然而对于 M 所诱导的向量空间 $\widehat{M}$ 而言，右 $A^{(2)}$-作用未必能保证交换性 $\varphi_b\varphi_a=\varphi_d\varphi_c$.

引理 2. 设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图. 则 A 是含强零张量因子代数.

证. 本证明将构造两个非零的不可分解模 $M=M_A\in\mathsf{ind}(A\text{-}\mathsf{mod})$ 以及 $N={}_AN\in\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\text{-}A)$，使得 $M\otimes_A N=0$. 记 $\mathcal{Q}$ 包含的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图为 $\mathcal{Q}'=v\xrightarrow{\alpha}w$. 考虑右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-内射模 $E(v)_{\Bbbk\mathcal{Q}'}=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}((\Bbbk\mathcal{Q}')\varepsilon_v,\Bbbk)\cong\Bbbk\varepsilon_v$ 和左 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-内射模 ${}_{\Bbbk\mathcal{Q}'}E'(w)=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}((\Bbbk\mathcal{Q}')\varepsilon_w,\Bbbk)\cong\Bbbk\varepsilon_w$. 有

$$E(v)\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}E'(w)\cong\Bbbk\varepsilon_v\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}\Bbbk\varepsilon_w=\Bbbk(\varepsilon_v\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}\varepsilon_w)=0.$$

由引理 1 中的函子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$：$\mathsf{mod}\text{-}\Bbbk\mathcal{Q}'\to\mathsf{mod}\text{-}A$ 以及 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$：$\Bbbk\mathcal{Q}'\text{-}\mathsf{mod}\to A\text{-}\mathsf{mod}$，我们构造了右 A-模 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和左 A-模 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$. 由于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$ 是嵌入，可知 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 都是非零的. 下面证明 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))\otimes_A\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))=0$. 注意在 $\mathsf{ind}(A\text{-}\mathsf{mod})$ 中，${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 同构于 $v\in\mathcal{Q}_0$ 对应的单模 ${}_AS(v)$，即

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))\cong{}_AS(v)\cong{}_AP(v)/\mathrm{rad}({}_AP(v))\cong\Bbbk\varepsilon_v\oplus\bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\ge1}\\ \mathfrak{t}(\wp)=v}}\Bbbk\wp\Big/\bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\ge1}\\ \mathfrak{t}(\wp)=v}}\Bbbk\wp$$

(注意左 A -投射模 ${}_AP(v) = A\varepsilon_v$ 由以 v 结尾的路径决定).

同理,

$$F_{\text{emb}}(E(v)) \cong S(w) \cong P(w)/\text{rad}P(w) \cong \Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp$$

(注意右 A -投射模 $P(w)_A = \varepsilon_w A$ 由以 w 开始的路径决定).

从而, 作为 $\Bbbk$ -向量空间而言, 利用张量的运算性质, 有如下同构:

$$\begin{aligned}
&{}_{\text{emb}}F(E'(w)) \otimes_A F_{\text{emb}}(E(v)) \\
&\cong_{\Bbbk} \Big(\Bbbk\varepsilon_v \oplus \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} \Bbbk\wp\Big) \otimes_A \Big(\Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big/ \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp\Big) \\
&= \Big(\Bbbk\varepsilon_v \oplus \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} \Bbbk\wp\Big) \otimes_A \Big(\Bbbk\varepsilon_w \oplus \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp\Big) \Big/ \Big\langle \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} \Bbbk\wp, \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big\rangle \\
&= \big(\Bbbk\varepsilon_v \otimes_A \Bbbk\varepsilon_w\big) \Big/ \Big\langle \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} \Bbbk\wp, \bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} \Bbbk\wp \Big\rangle
\end{aligned}$$

(注意 $\bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp)=v}} (\Bbbk\wp \otimes \Bbbk\varepsilon_w) = 0$, $\bigoplus_{\substack{\wp\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{s}(\wp)=w}} (\Bbbk\varepsilon_v \otimes \Bbbk\wp) = 0$ 以及 $\bigoplus_{\substack{\wp_1,\wp_2\in\mathcal{Q}_{\geq 1} \\ \mathfrak{t}(\wp_1)=w,\, \mathfrak{t}(\wp_2)=v}} (\Bbbk\wp_1 \otimes \Bbbk\wp_2) = 0$)

$$\cong_{\Bbbk} \Bbbk\varepsilon_v \otimes_A \Bbbk\varepsilon_w = 0 .$$

由此可见 A 有强零张量因子 $F_{\text{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\text{emb}}F(E'(w))$. □

根据**引理 2**, 我们立刻得到下述推论.

推论 1. 设 $\mathcal{Q}$ 是连通箭图且包含至少两个顶点. 则有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是含强零张量因子代数.

证. 由箭图的连通性可知存在两个顶点 v 和 w, 二者被某个箭向 α 相连. 而 v, w 和 α 诱导了 $\mathcal{Q}$ 的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图, 由**引理 2**, 可知推论成立. □

引理 3. 设有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 loop $\mathcal{C} =$ (α 绕顶点 1 的 loop), 且存在正整数 ω, 使得 $\alpha^\omega \notin \mathcal{I}$. 则存在 $\Bbbk$- 范畴的嵌入

$${}_{\text{emb}}F^o : \Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle\text{-mod} \to A\text{-mod} \text{ 以及 } F^o_{\text{emb}} : \text{mod-}\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle \to \text{mod-}A,$$

该嵌入自然地将左/右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle$-模视作左/右 A- 模.

证. 任意右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle$-模的箭图表示是二元组 (V, φ_α), 其中 V 是 $\Bbbk$ -向量空间, 右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle$-作用由 $\Bbbk$ -线性变换 $\varphi_\alpha \in \text{End}_{\Bbbk}V$ ($\varphi_\alpha^\omega = 0$) 按照 $V \times \Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle \to V$, $v\alpha := \varphi_\alpha(v)$ 给出. 取 $\widehat{V} := \bigoplus_{i\in\mathcal{Q}_0} V_i$, 其中 $V_i = V$, 如果 $i = 1$; 否则, 即 $i \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{1\}$ 时, 取 $V_i = 0$. 则 $(\widehat{V}, \widehat{\varphi_a})_{a\in\mathcal{Q}_1}$ 决定了 $\widehat{V}$ 是一个右 A -模, 其中,

$$\widehat{\varphi_a} = \begin{cases} \varphi_\alpha, & a = \alpha; \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

取 $F^o_{\text{emb}}(V) \cong \widehat{V}$, 则 F^o_{emb} 自然地将每一个右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^\omega\rangle$ -模看成了右 A -模, 易见 F^o_{emb} 诱导了一个 $\Bbbk$ -范畴的嵌入. □

注意上述证明无需讨论 α^ω 是否是 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量. 事实上, 如果存在 $\sum_{i\in I} k_i\wp_i \in \mathcal{I}$ (其中 $\mathfrak{s}(\wp_i) = \mathfrak{t}(\wp_i) = 1$), 使得 $\alpha^\omega = \wp_j$ ($j \in I$), 仍然考虑**引理 3** 的证明中所构造的 $(\widehat{V}, \widehat{\varphi_a})_{a\in\mathcal{Q}_1}$, 此时 $\varphi_{\sum_{i\in I} k_i\wp_i} = \sum_{i\in I} k_i\varphi_{\wp_i} = 0$ 是自然成立的, 因此 $(\widehat{V}, \widehat{\varphi_a})_{a\in\mathcal{Q}_1}$ 仍是右 A -模. 如果 α^ω 不是任何 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量, 则**引理 3** 成立的理由与**引理 1** 一致. 特别地, 以 $\omega = 2$ 的情形作为一个例子: $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^2\rangle$ 上的不可分解右模只有单模 $S(1)$ 和投射-内射模 $P(1) \cong E(1)$. 其对应地看成右 A -模, 则分别是右 A -单模 $S(1)_A$ 和不可分解右 A -模 $\Bbbk\varepsilon_1 + \Bbbk\alpha$. 在这个观点下, **引理 3** 是明确的.

引理 4. 设有限维代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop. 则 A 是无强零张量因子代数.

证. 设 $\mathcal{Q} =$ (x 绕顶点 1 的 loop), 则 $A \cong \Bbbk[x]/\mathcal{I}$. 因此任意左/右 A -模自然地也是左/右 $\Bbbk[x]$ -模, 即, 存在 $\Bbbk$ -

范畴的嵌入函子 $\boldsymbol{F}:\text{mod-}A\to\text{mod-}\Bbbk[x]$. 任取非零的有限生成右 A-模 M 和左 A-模 N，由 A 是交换代数，自然地有 $M\otimes_A N$ 也是右 A-模. 加之 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入，因此 $\boldsymbol{F}(M)\neq 0$ 且 $\boldsymbol{F}(N)\neq 0$. 故根据**命题 2**, $\Bbbk[x]$ 是无强零张量因子环，于是得 $\boldsymbol{F}(M\otimes_A N)=\boldsymbol{F}(M)\otimes_{\Bbbk[x]}\boldsymbol{F}(N)\neq 0$. 再次利用 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入，得 $M\otimes_A N\neq 0$. □

推论 2. 设 $\mathcal{Q}$ 是包含 loop 的箭图 (可以是非连通箭图). 则有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是无强零张量因子代数当且仅当 $\mathcal{Q}$ 自身是 loop.

证. **引理 4** 给出了充分性"$\Leftarrow$"，**引理 2** 给出了必要性"$\Rightarrow$".

定理 1. 设非单的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图是连通箭图，且该箭图只包含至多 1 个 loop. 则 A 是无强零张量因子代数当且仅当 A 同构于一元多项式环的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ (其中，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 都是 admissible 理想).

证. 设 A 无强零张量因子，则由**推论 1**, A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 只含有一个顶点，记此顶点为 1. 此时必有 $\mathcal{Q}=$ (以 x 为 loop、顶点为 1 的箭图). 因此，$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}\cong\Bbbk[x]/\mathcal{I}$，这里取 $\mathcal{J}=\mathcal{I}$. 反之，若 $A\cong\Bbbk[x]/\mathcal{J}$，则由 $\mathcal{J}$ 是 admissible 理想，可知 A 的箭图是一个 loop. 根据**推论 2**, A 没有强零张量因子. □

2.2 有限维代数的含/无弱零张量因子性.

本节将考虑代数的弱零张量因子. 在 2.1 节中，我们指出连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图如果含有至多 1 个 loop，则 A 含强零张量因子当且仅当 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop (见**定理 1**). 因此，根据**命题 1**, 立刻有下面结果.

推论 3. 如果连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop，A 必定含有弱零张量因子.

下面考虑 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop 的情形，此时 A 同构于 $\Bbbk[x]$ 的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$，由 $\sharp\mathcal{Q}_0=1$ 可知 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 有唯一的不可分解投射左/右 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$-模 P. 我们将利用 P 指出此时的 A 依然含有弱零张量因子.

命题 3. 有限维代数 $A=\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是含弱零张量因子代数[2].

证. 首先，A 有唯一的不可分解投射右/左 A-射模 $\varepsilon_1 A\cong_A\sum_{i=0}^{t-1}\Bbbk x^i\cong A\varepsilon_1=A$. 则张量 $\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1$ 可通过如下同构约化:

$$\sigma:\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1=A\otimes_A A\xrightarrow{\cong}A.$$

注意到 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是主理想整环，所以存在 $f(x)=k_2x^2+k_3x^3+\cdots+k_tx^t\in\Bbbk[x]$ ($t\geq 2$)，使得 $\mathcal{J}=\langle f(x)\rangle$. 所以 $f(x)$ 存在一个形如 $f(x)=x\varphi(x)$ 的分解，其中 $\varphi(x)$ 是域 $\Bbbk$ 上的 $t-1$ 次多项式. 显然，在代数 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 中，$x\neq 0$ 且 $\varphi(x)\neq 0$，但 $f(x)=x\varphi(x)\in\mathcal{J}=\langle f(x)\rangle$. 这就构造了张量 $\varepsilon_1 A\otimes_A A\varepsilon_1$ 中的元素 $x\otimes\varphi(x)$，使得 $\sigma(x\otimes\varphi(x))=x\varphi(x)\overset{\text{在}\Bbbk[x]/\mathcal{J}\text{中}}{=\!=\!=\!=\!=}0$，进而得到 $x\otimes\varphi(x)\overset{\text{在}A\text{中}}{=\!=\!=}0$. □

由**推论 3** 和**命题 3**, 我们得到下面定理.

定理 2. 有限维代数总是含弱零张量因子代数.

3 主要结论

下面，我们给出本文的主要结论.

定理 3. 设 $\Bbbk$-代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 非单，其箭图连通且只包含至多 1 个 loop.

(1) 如果 A 是有限维代数，则下面论述等价:

- (a) A 是含强零张量因子代数;
- (b) $\sharp\mathcal{Q}_0\geq 2$;
- (c) $\mathcal{Q}$ 或者包含一个 loop 为真子箭图，或者不含 loop.

(2) 如果 A 是无弱零张量因子代数，则 A 是无限维代数.

[2] 此命题不要求域 $\Bbbk$ 是代数闭的.

证. (1) (a)⇒(b): 反设 A 的箭图 Q 只有一个顶点，则 Q 只能是 1 个 loop，根据**定理 1**，A 无强零张量因子，矛盾. (b)⇒(c): 由 Q 包含至多 1 个 loop 可知此为显然的. (c)⇒(a): 如果 Q 不含 loop，或者 Q 包含 loop 并以此 loop 为真子箭图，均可知 Q 不是 loop，自然地，在同构意义下，A 不是形如 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 形式的代数. 根据**定理 1**，可知 A 含强零张量因子.

(2) 取**定理 2** 的逆否命题即可. □

注意非单且无弱零张量因子代数是存在的，见**例 5**.

例 5. 考虑多项式环 $A = \Bbbk[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$，并任取多项式 $f(x_1,\cdots,x_m) \in A$ 和 $g(x_1,\cdots,x_n) \in A$ 使得

$$f(x_1,\cdots,x_m)g(x_1,\cdots,x_n) = 0.$$

则由 $\Bbbk$ 是域可知 A 是无零因子环，进而有 $f(x_1,\cdots,x_m) = 0$ 或者 $g(x_1,\cdots,x_n) = 0$. 注意对于一般的多项式环 $R[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$（$R$ 是环），上式未必能使得 $f(x_1,\cdots,x_m) = 0$ 或者 $g(x_1,\cdots,x_n) = 0$.

参考文献

1. BAO Y H. The quiver method on the representation theory of tensor product algebras and hereditary algebras (in Chinese). PhD Thesis. Innsbruck: Anhui University, 2010.
2. BUCHWEITZ R-O, GREEN E L, MADSEN D, SOLBERG O. Finite hochschild cohomology without finite global dimension [J]. *Mathematical research letters*, **12**:805－816, 2005. DOI: 10.4310/MRL.2005.v12.n6.a2.
3. Happel D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. In: *Séminaire d'Algébre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, 1989. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1404. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006, 108–126, DOI:10.1007/BFb0084073.
4. HERSCHEND M. Solution of the Clebsch-Gordan problem for Kronecker representations. U.U.D.M Project Report 2003:P1, Uppsala University, 2003.
5. HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan problem for representations of quivers of type $\tilde{A}_n$ [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, **4**(5):481－488, 2005. DOI: 10.1142/S0219498805001332.
6. HERSCHEND M. Galois coverings and the Clebsch-Gordon problem for quiver representations [J]. *Colloquium Mathematicum*, **109**(2):193－215, 2007. DOI: 10_4064-cm109-2-3.
7. HERSCHEND M. Tensor products on quiver representations [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **1**(212): 452－469, 2008. DOI: 10.1016/j.jpaa.2007.06.004.
8. HU W, LUO X-H, XIONG B-L, ZHOU G D. Gorenstein projective bimodules via monomorphism categories and filtration categories [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **233**(3): 1014–1039, 2019. DOI: 10.1016/j.jpaa. 2018.05.012.
9. HOCHSCHILD G. On the cohomology groups of an associative algebra [J]. *Annals of Mathematics*, 46: 58–67, 1945. DOI:10.2307/1969145.
10. LIU Y-Z, ZHANG Y F. Sufficient and necessary conditions for the multiple tensors of algebras of type A to berepresentation-finite (in Chinese) [EB/OL] (2023-9-29). *Science Sinica Mathematics*, Publish Oline, 2023. DOI: 10.1360/SSM-2023-0080.
11. MAHDOU N, TAMEKKANTE M. On Gorenstein global dimension of tensor product of algebras over a field [J]. *Gulf Journal of Mathematic*s, **3**: 30–37, 2015. DOI: 10.56947/gjom.v3i2.159.
12. MARTSINKOVSKY A, VLASSOV A. The representation ring of *k*[x] [EB/OL] (2023-9-29). preprint, 2004.
13. ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra (Second Edition)* [M]. New York: Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0.